Gewöhnliche Differentialgleichungen
höherer Ordnung
in ihrer Beziehung zu den Integralgleichungen.

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

einer

hohen philosophischen Fakultät

der

Georg - Augusts - Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Alexander Myller

aus Bukarest.

Göttingen 1906.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei.

(W. Fr. Kaestner.)

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Mai 1906.

Referent: Herr Geh. Rat Prof. Dr. Hilbert.

Einleitung.

Die mathematische Physik hat seit langer Zeit die Mathematiker auf Integralgleichungen geführt. Trotz ihres häufigen Vorkommens sind aber die Eigenschaften und die wichtige Rolle, welche diese Gleichungen in vielen Problemen spielen, erst in der letzten Zeit bekannt geworden. Die physikalischen Probleme, in welchen die Integralgleichungen auftraten oder auftreten konnten, wurden im allgemeinen mit Hülfe von Differentialgleichungen, die neben den Integralgleichungen als gleichberechtigt für die Untersuchung standen, gelöst.

Hilbert hat, nachdem schon Neumann und Fredholm Methoden zur Lösung von Integralgleichungen gefunden hatten, den Wert der Integralgleichungen in ganzem Umfange erkannt. In einer Reihe von Mitteilungen an die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften betrachtet er zwei Arten von linearen Integralgleichungen: Integralgleichungen erster Art, welche die Form

$$f(s) = \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

und Integralgleichungen zweiter Art, welche die Form

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

haben. Dabei ist $K(s, t)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s und t, $f(s)$ eine gegebene, $\varphi(s)$ eine zu bestimmende Funktion und λ ein Parameter. Jede der Veränderlichen kann sich im Intervalle von a bis b bewegen. Die Funktion $K(s, t)$ heißt der Kern der Integralgleichung.

In seiner ersten Mitteilung[1]) begründet Hilbert die Theorie,

1) Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-physikalische Klasse, 1904, Heft 1.

indem er von dem Problem der orthogonalen Transformation einer quadratischen Form von n Variabeln ausgeht und durch strenge Ausführung des Grenzüberganges für $n = \infty$ zur Lösung des transcendenten Problems der Integralgleichungen gelangt.

In der zweiten Mitteilung[1]) sind Anwendungen auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung behandelt. Hier zeigen sich die Vorteile der Methode der Integralgleichungen. Verschiedene Randwertaufgaben, gleichviel ob sie bei gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen vorkommen und unabhängig von der Art der auferlegten Randbedingungen können, wenn einmal die ihnen entsprechenden Integralgleichungen gefunden sind, nach derselben allgemeinen Methode untersucht werden. Es werden in dieser Weise die Entwickelungen willkürlicher Funktionen nach trigonometrischen, Bessel'schen, nach Kugel-, Lamé'schen, Sturm'schen und anderen Funktionen als spezielle Fälle einer allgemeinen, aus der Theorie der Integralgleichungen herstammenden „Entwickelung nach Eigenfunktionen" erkannt.

An diese letzte Mitteilung von Hilbert schließt sich die folgende Arbeit an. Es ist ein Beitrag zur Theorie der Randwertaufgaben bei Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung.

Es stellt sich heraus, daß diese Differentialgleichungen auf dieselbe Art von Integralgleichungen wie diejenige zweiter Ordnung führen. Daraus ergibt sich auch hier die Möglichkeit, die allgemeinen Sätze der Theorie der Integralgleichungen anzuwenden. Unter anderem wird die Entwickelung willkürlicher Funktionen nach Funktionen, die eine Differentialgleichung höherer Ordnung befriedigen, erörtert.

Die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{B}(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = \lambda \mathrm{A}(x) u,$$

welche bei der Untersuchung der transversalen Schwingungen eines elastischen dünnen Stabes vorkommt, ist als Beispiel herangezogen. Lord Rayleigh[2]) hat, auf mechanische Prinzipien gestützt, diese Gleichung zuerst untersucht. A. Davidoglou[3]) hat sie später mit Hülfe der Methode der successiven Annäherungen behandelt. Die Beziehungen dieser Gleichung zu der Integralgleichungstheorie habe ich in „Bulletin de la société des

1) Loc. cit., Heft 3.

2) Theory of Sound, vol. I.

3) Ann. de l'éc. normale super., 1900 und 1906.

sciences de Bucarest“ [1]) angedeutet. Im Herbst 1905 ist eine Arbeit von W. Westfall [2]) erschienen, in welcher viele früher in meiner Note behandelte Fragen abermals in Betracht gezogen sind.

Bei der Abfassung dieser Arbeit sind mir nicht nur die ausgezeichneten Vorlesungen meines hochverehrten Lehrers D. Hilbert, sondern auch seine immer wohlwollenden Ratschläge von großem Nutzen gewesen. Ich spreche ihm meinen herzlichen Dank aus.

I. Gewöhnliche Differentialgleichungen vierter Ordnung. Allgemeine Betrachtungen.

Es seien u, p, q, r beliebige vier Funktionen von x, welche innerhalb und an den Grenzen des Intervalles $x = a$ bis $x = b$ die Forderungen erfüllen, daß u, p, q viermal, resp. zweimal und einmal stetig differenzierbar [3]) sind und r stetig ist. Der allgemeinste homogene lineare sich selbst adjungierte Differentialausdruck vierter Ordnung hat die Gestalt:

$$L(u) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{d^2u}{dx^2}\right) + \frac{d}{dx}\left(q\frac{du}{dx}\right) + ru.$$

Wenn v eine ebenso wie u viermal stetig differenzierbare Funktion von x bedeutet, bekommt man leicht durch partielle Integration die folgende Green'sche Formel:

$$(1)\quad \int_a^b [vL(u) - uL(v)]\,dx = \left[p\left(v\frac{d^3u}{dx^3} - \frac{dv}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx^2}\frac{du}{dx} - \frac{d^3v}{dx^3}u\right) + \frac{dp}{dx}\left(v\frac{d^2u}{dx^2} - u\frac{d^2v}{dx^2}\right) + q\left(v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}\right)\right]_a^b.$$

Es sei $\gamma(x, \xi)$ eine Funktion der Variabeln x und des Parameters ξ, die innerhalb des Intervalles a bis b in Bezug auf x der Differentialgleichung

$$L(u) = 0$$

---

1) Février 1905.

2) Zur Theorie der Integralgleichungen, Göttingen 1905.

3) Eine Funktion, deren n-erste Ableitungen stetig sind, heißt nach Hilbert n-mal stetig differenzierbar.

genügt. Diese Funktion ist in demselben Intervalle für alle von ξ verschiedene Werte von x viermal stetig differenzierbar. Im Punkte $x = \xi$ aber verläuft sie und ihre zwei ersten Ableitungen stetig, während die dritte Ableitung den Abfall -1 aufweist, sodaß

$$\underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d^3\gamma}{dx^3}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L}\left[\frac{d^3\gamma}{dx^3}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = -1$$

ist. Eine solche Funktion werde eine Grundlösung der Differentialgleichung $L(u) = 0$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$ genannt.

Sind $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $u_4(x)$ vier unabhängige partikuläre Lösungen von $L(u) = 0$, so kann eine Grundlösung offenbar durch die folgende Formel dargestellt werden:

$$\gamma(x,\xi) = -\frac{1}{2}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\,\frac{\begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & u_3(x) & u_4(x) \\ \frac{d^2u_1(\xi)}{d\xi^2} & \frac{d^2u_2(\xi)}{d\xi^2} & \frac{d^2u_3(\xi)}{d\xi^2} & \frac{d^2u_4(\xi)}{d\xi^2} \\ \frac{du_1(\xi)}{d\xi} & \frac{du_2(\xi)}{d\xi} & \frac{du_3(\xi)}{d\xi} & \frac{du_4(\xi)}{d\xi} \\ u_1(\xi) & u_2(\xi) & u_3(\xi) & u_4(\xi) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{d^3u_1(\xi)}{d\xi^3} & \frac{d^3u_2(\xi)}{d\xi^3} & \frac{d^3u_3(\xi)}{d\xi^3} & \frac{d^3u_4(\xi)}{d\xi^3} \\ \frac{d^2u_1(\xi)}{d\xi^2} & \frac{d^2u_2(\xi)}{d\xi^2} & \frac{d^2u_3(\xi)}{d\xi^2} & \frac{d^2u_4(\xi)}{d\xi^2} \\ \frac{du_1(\xi)}{d\xi} & \frac{du_2(\xi)}{d\xi} & \frac{du_3(\xi)}{d\xi} & \frac{du^4(\xi)}{d\xi} \\ u_1(\xi) & u_2(\xi) & u_3(\xi) & u_4(\xi) \end{vmatrix}}$$

Zu einer vorgelegten Differentialgleichung gibt es offenbar unendlich viele Grundlösungen; diese werden sämtlich aus einer von ihnen erhalten, wenn man derselben ein beliebiges Integral der Differentialgleichung hinzufügt, das an jeder Stelle innerhalb des Intervalles viermal stetig differenzierbar ist.

Es sind für uns von besonderer Wichtigkeit diejenigen Grundlösungen, die an den Randpunkten $x = a$ und $x = b$ gewisse homogene Bedingungen erfüllen. Der Klarheit wegen wollen wir zuerst diese Bedingungen für irgend eine Funktion aufstellen.

Wenn wir neben den vorher gemachten Voraussetzungen über p, q, r auch diejenige hinzufügen, daß p innerhalb und an den Grenzen des Intervalles positiv ausfällt, kommen besonders die folgenden Randbedingungen in Betracht:

$$\text{I.}\qquad f(a) = 0 \qquad\qquad f(b) = 0$$
$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b} = 0.$$

$$\text{II.}\qquad f(a) = 0 \qquad\qquad f(b) = 0$$
$$\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=a} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=b} = 0.$$

Ist q identisch Null, dann kann man noch die folgende Randbedingung betrachten:

$$\text{III.}\qquad \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=a} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=b} = 0$$
$$\left[\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]_{x=a} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]_{x=b} = 0.$$

Die drei in der rechten Spalte aufgezählten Randbedingungen können auch in anderer Weise mit denjenigen der linken Spalte kombiniert werden.

In dem Falle, daß p und q zwei periodische Funktionen mit einer dem Intervalle a bis b gleichen Periode sind und ausserdem p positiv ausfällt, können wir die Periodicität der Funktion f verlangen, d. h. die Randbedingungen:

$$\text{IV.}\qquad \begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=a} &= \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=b} \\ \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=a} &= \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=b} \\ \left[\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]_{x=a} &= \left[\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]_{x=b}. \end{aligned}$$

Wenn p innerhalb des Intervalles positiv, an einer Grenze aber, z. B. in $x = a$, nebst $\frac{dp}{dx}$ und q gleich Null ist und man weiß, daß an derselben Grenze unter den vier unabhängigen Integralen zwei endlich und zwei unendlich sind, dann kann man als Randbedingungen die Forderung aufstellen:

V. $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = a$ endlich bleiben. An der anderen Grenze $x = b$ kann je nach dem Falle dieselbe oder eine andere Bedingung verlangt werden.

Eine Grundlösung $g(x, \xi)$ für das Intervall $x = a$ bis $x = b$, die an den Randpunkten zwei homogene Randbedingungen der genannten Art erfüllt, heißt die zu diesen Randbedingungen ge-

hörige Green'sche Funktion der Differentialgleichung $L(u) = 0$; der Quotient

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

heißt die zu jenen Randbedingungen gehörige Green'sche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$. Wir bezeichnen diese Green'schen Funktionen je nach den Randbedingungen, zu denen sie gehören, durch G^{I}, G^{II} etc.; wenn sie zu kombinierten Randbedingungen gehören, dann werden wir die Bezeichnungen $G^{\mathrm{I\,II}}$, $G^{\mathrm{I\,III}}$ etc. gebrauchen.

Man bildet eine Green'sche Funktion, indem man zu einer Grundlösung $\gamma(x, \xi)$ vier von einander unabhängige, mit unbestimmten Koeffizienten multiplizierte Lösungen $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $u_4(x)$ der Differentialgleichung $L(u) = 0$ hinzufügt und diese Koeffizienten in der Weise bestimmt, daß der Ausdruck:

$$(2) \qquad \gamma(x, \xi) + Au_1(x) + Bu_2(x) + Cu_3(x) + Du_4(x)$$

die verlangten Randbedingungen erfüllt.

Es kann vorkommen, daß für einen Differentialausdruck $L(u)$ bei gewissen Randbedingungen keine Green'sche Funktion im eben definierten Sinne vorhanden ist. In diesem Falle existiert, wie später allgemein erkannt wird, eine oder mehrere nicht identisch verschwindende Lösungen der Differentialgleichung $L(u) = 0$, die überall innerhalb des Intervalles stetig differenzierbar sind und den betreffenden Randbedingungen genügen.

Betrachten wir zuerst den Fall, wo es nur eine solche Lösung $\psi^{(0)}(x)$ von $L(u) = 0$ giebt. Diese Lösung $\psi^{(0)}(x)$ kommt dann in (2) linear vor, und der Einfachheit halber nehmen wir $u_4(x) = \psi^{(0)}(x)$. Der Koeffizient D kann in diesem Falle nicht mehr zur Bestimmung der Green'schen Funktion dienen; er bleibt unbestimmt, und die anderen A, B, C sind ungenügend. Wir konstruieren dann ein Integral $g'(x, \xi)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$(3) \qquad L(u) = m\psi^{(0)}(x),$$

dessen dritte Ableitung an der Stelle $x = \xi$ den Abfall -1 erfährt, während $g'(x, \xi)$ an allen anderen Stellen innerhalb des Intervalles viermal stetig differenzierbar ist und die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Dabei ist m eine unbestimmte Konstante, die uns dienen wird, die eben verlangte Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Wir bilden den Ausdruck:

$$(4) \qquad \gamma(x, \xi) + Au_1(x) + Bu_2(x) + Cu_3(x) + mv(x).$$

Dabei ist $mv(x)$ eine Lösung der Gleichung (3), welche den unbestimmten Koeffizienten enthalten muß. Die verlangte Lösung $g'(x, \xi)$ können wir jetzt aus (4) leicht bekommen, indem wir die vier Koeffizienten A, B, C und m durch die Randbedingungen bestimmen. Außer der so gefundenen Lösung $g'(x, \xi)$ gibt es unendlich viele andere, die wir aus der einen durch Hinzufügen von $c\psi^{(0)}(x)$, wo c eine beliebige Konstante ist, bekommen können. Wir bestimmen c durch die Bedingung, daß

$$g(x, \xi) = g'(x, \xi) + c\psi^{(0)}(x)$$

die Gleichung

$$\int_a^b g(x, \xi)\psi^{(0)}(x)\,dx = 0$$

erfüllt.

Die Funktionen $g(x, \xi)$ und

$$G(x, \xi) = \frac{g(x, \xi)}{p(\xi)}$$

leisten die nämlichen Dienste wie sonst die Green'schen Funktionen und werden daher als Green'sche Funktionen im erweiterten Sinne bezeichnet.

Gehen wir jetzt zu dem Fall über, daß zwei nicht identisch verschwindende Lösungen $\psi_1^{(0)}(x)$ und $\psi_2^{(0)}(x)$ von $L(u) = 0$ existieren, die stetig sind und die betreffenden Randbedingungen erfüllen. Zwei Koeffizienten, z. B. C und D, lassen sich dann im Ausdruck (2) nicht bestimmen. Der Ausdruck:

$$\gamma(x, \xi) + Au_1(x) + Bu_2(x) + mv_1(x) + nv_2(x), \tag{5}$$

wo $mv_1(x)$ und $nv_2(x)$ Lösungen der Gleichungen:

$$L(u) = m\psi_1^{(0)}(x)$$

resp.

$$L(u) = n\psi_2^{(0)}(x)$$

sind, befriedigt die Differentialgleichung

$$L(u) = m\psi_1^{(0)}(x) + n\psi_2^{(0)}(x)$$

und weist den bekannten Abfall der dritten Ableitung auf. Wir bekommen eine besondere Lösung $g'(x, \xi)$, wenn wir die unbestimmten Koeffizienten durch die Randbedingungen bestimmen. Die Funktion

$$g(x, \xi) = g'(x, \xi) + c\psi_1^{(0)}(x) + c'\psi_2^{(0)}(x)$$

hat dieselben Eigenschaften wie $g'(x, \xi)$, und, wenn wir die Kon-

stanten c und c' durch die Bedingungen

$$\int_a^b g(x, \xi)\, \psi_1^{(0)}(x)\, dx = 0$$

und

$$\int_a^b g(x, \xi)\, \psi_2^{(0)}(x)\, dx = 0$$

bestimmen, bekommen wir eine, diesem Falle entsprechende Green'sche Funktion im erweiterten Sinne.

Alle so konstruierten Green'schen Funktionen weisen das Symmetriegesetz auf, d. h. bleiben ungeändert bei Vertauschung der Veränderlichen und des Parameters. Man überzeugt sich leicht davon, indem man in der Greenn'schen Formel (1) an Stelle von $u(x)$ und $v(x)$ entsprechend die Funktionen $G(x, \xi)$ und $G(x, \xi^*)$ setzt und die Unstetigkeit der dritten Ableitung berücksichtigt. Zu diesem Zwecke müssen wir in der linken Seite der Formel (1) die Intervalle $x = a$ bis $x = \xi - \varepsilon$; $x = \xi + \varepsilon$ bis $x = \xi^* - \varepsilon$; $x = \xi^* + \varepsilon$ bis b trennen und den Grenzübergang für $\varepsilon = 0$ ausführen. Man bekommt

$$G(\xi, \xi^*) = G(\xi^*, \xi).$$

Alle diese Eigenschaften der Green'schen Funktionen werden uns helfen, die von Hilbert für Differentialgleichungen zweiter Ordnung bewiesenen Sätze auf unsere Differentialgleichungen vierter Ordnung nur mit sehr kleinen Änderungen zu übertragen.

Bedeutet $\varphi(x)$ eine gegebene stetige Funktion der Variabeln x und verstehen wir unter f eine überall viermal stetig differenzierbare Lösung der inhomogenen Differentialgleichung vierter Ordnung

$$L(f) = -\varphi(x), \tag{6}$$

die einem Paar unserer Randbedingungen I—V genügt, setzen wir dann in der Green'schen Formel (1) an Stelle von u diese Lösung f und an Stelle von v die zu jenen Randbedingungen gehörige Green'sche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$, so finden wir für jede der fünf Arten von Randbedingungen

$$\int_a^b G(x, \xi)\, L(f(x))\, dx = -f(\xi);$$

und hieraus ersehen wir mit Rücksicht auf das Symmetriegesetz der Green'schen Funktion, daß die Lösung $f(x)$ sich folgendermaßen durch ein bestimmtes Integral darstellt:

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Daß die so dargestellte Funktion $f(x)$ wirklich den betreffenden Randbedingungen genügt, ist offenbar, weil $G(x, \xi)$ denselben genügt; die durch (7) dargestellte Funktion $f(x)$ genügt aber auch der Differentialgleichung (6), wie durch Rechnung leicht gezeigt wird. Wenn somit eine viermal stetig differenzierbare und einem Paar unserer Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ und irgend eine stetige Funktion $\varphi(x)$ durch die Relation (6) mit einander verknüpft sind, so folgt für dieselben notwendig auch die Relation (7) und umgekehrt, wenn für zwei solche Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ die Relation (7) besteht, so folgt für sie notwendig auch die Relation (6). Hieraus entnehmen wir sofort, daß einerseits die Funktion f unter Hinzunahme der betreffenden Randbedingungen durch die Differentialgleichung (6), wobei φ gegeben, und andererseits die Funktion $\varphi(x)$ durch die Integralgleichung (7), wobei f gegeben, eindeutig bestimmt ist. Die Gleichung (7) ist eine Integralgleichung erster Art; $G(x, \xi)$ ist der Kern dieser Integralgleichung und wegen des Symmetriegesetzes eine symmetrische Funktion der Argumente. Es ergibt sich infolgedessen

Satz 1: Wenn die Green'sche Funktion eines Differentialausdruckes $L(u)$ für irgend ein Paar der Randbedingungen I—V als Kern einer Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

genommen wird, wo $f(x)$ eine gegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, die den betreffenden Randbedingungen genügt, so besitzt diese Integralgleichung eine und nur eine Lösung $\varphi(x)$, und man erhält ihre Lösung durch die Formel

$$\varphi(x) = -L(f(x)).$$

Umgekehrt, wenn $\varphi(x)$ irgend eine stetige Funktion ist und eine Lösung $f(x)$ der Differentialgleichung

$$L(f(x)) + \varphi(x) = 0$$

gefunden werden soll, die einem ausgewählten Paare von Randbedingungen I—V genügt, so ist diese Lösung dadurch eindeutig bestimmt, und man erhält sie durch die Formel

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Aus diesem Satze entnehmen wir leicht, daß die Green'sche Funktion $G(x, \xi)$ einen Kern darstellt, der nach der von Hilbert

eingeführten Ausdrucksweise[1]) abgeschlossen ist, d. h. der Kern ist so beschaffen, daß die Gleichung

$$\int_a^b G(x, \xi)\, g(x)\, dx = 0$$

sich niemals durch eine stetige von Null verschiedene Funktion $g(s)$ identisch in ξ erfüllen läßt. In der Tat sei $\varphi(x)$ eine solche Funktion, daß

$$\int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

identisch für alle x verschwindet, so müßte die Funktion $f(x) = 0$ der Differentialgleichung $L(f) = -\varphi$ genügen, und hieraus folgt, daß $\varphi(x)$ identisch für alle x verschwindet, d. h. $G(x, \xi)$ ist ein abgeschlossener Kern.

In den vorstehenden Betrachtungen spielte die Integralgleichung erster Art eine wesentliche Rolle; wir werden zu einer Integralgleichung zweiter Art gelangen, wenn wir neben $L(u)$ noch den Differentialausdruck

$$\Lambda(u) \equiv L(u) + \lambda u$$

betrachten, wo λ einen Parameter bezeichnet. Es sei wie bisher $G(x, \xi)$ die zu gewissen Randbedingungen gehörige Green'sche Funktion des Ausdruckes $L(u)$ und $\Gamma(x, \xi)$ die zu nämlichen Randbedingungen gehörige Green'sche Funktion des Ausdruckes $\Lambda(u)$. Sodann wenden wir die Green'sche Formel (1) an; nehmen wir

$$u(x) = G(x, \xi), \quad v(x) = \Gamma(x, \xi^*),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = {} & \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma(x, \xi^*)\, dx \\ & - \Bigg[p(x) \Bigg(\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial^3 G(x, \xi)}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} \\ & + \frac{\partial^2 \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x^2} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - \frac{\partial^3 \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x^3} G(x, \xi) \Bigg) \\ & - \frac{dp}{dx} \Bigg(\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} - G(x, \xi) \frac{\partial^2 \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x^2} \Bigg) \\ & - q(x) \Bigg(\Gamma(x, \xi^*) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} - G(x, \xi) \frac{\partial \Gamma(x, \xi^*)}{\partial x} \Bigg) \Bigg]_a^b. \end{aligned} \tag{8}$$

Wir erörtern zunächst die Randbedingungen I—IV; wenn wir demgemäß die Annahme machen, daß die Funktionen p, q, r

1) Erste Mitteilung S. 73.

in den Randpunkten sich regulär verhalten und dass p in den Randpunkten von Null verschieden ausfällt, so verhalten sich die Integrale der Differentialgleichung $L(u) = 0$ und $\Lambda(u) = 0$ und somit auch die Funktionen $G(x, \xi)$ und $\Gamma(x, \xi^*)$ in den Randpunkten regulär, und wir erkennen hieraus, daß die eckige Klammer auf der rechten Seite der Formel (8) verschwindet.

In dem Falle der Randbedingung V im Punkte $x = a$ müssen wir dementsprechend die Annahme machen, daß p, q, r sich in $x = a$ regulär verhalten, daß $p, \frac{dp}{dx}, q$ in diesem Punkte Null werden und überdies, daß jede der Gleichungen $L(u) = 0$ und $\Lambda(u) = 0$ zwei unendliche und zwei reguläre endliche Integrale besitzen. Die durch diese Randbedingung bestimmten Green'schen Funktionen G und Γ bewirken auch, daß die eckige Klammer auf der rechten Seite der Formel (8) verschwindet.

Wir erhalten in jedem Falle aus (8) die Formel

$$\Gamma(\xi, \xi^*) - G(\xi^*, \xi) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, \Gamma(x, \xi^*)\, dx. \tag{9}$$

Diese eben erlangte Formel stimmt genau mit einer von Hilbert in seiner ersten Mitteilung untersuchten Gleichung überein.

Er hat gezeigt, daß die Integralgleichung zweiter Art

$$f(s) = \varphi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

die Lösung

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, f(t)\, dt$$

hat; dabei ist $\mathrm{K}(s, t)$ der Quotient zweier beständig konvergenter Potenzreihen in λ, d. h.

$$\mathrm{K}(s, t) = -\frac{\Delta(\lambda; s, t)}{\delta(\lambda)},$$

wo die Entwickelungskoeffizienten der Reihe $\delta(\lambda)$ Konstanten und diejenigen von $\Delta(\lambda; s, t)$ Funktionen von s und t sind. Die Funktion $\mathrm{K}(s, t)$ heißt die lösende Funktion für den Kern $K(s, t)$ und befriedigt die Integralgleichung

$$K(s, t) = \mathrm{K}(s, t) - \lambda \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, K(t, r)\, dr.$$

Diese Formel aber ist nichts anderes als die Formel (9), wo G und Γ durch K resp. K ersetzt sind. Wir können infolgedessen den Satz aussprechen:

Satz 2: Wenn die Green'sche Funktion des Differentialaus-

druckes $L(u)$ für irgend ein Paar der Randbedingungen I—V als Kern der Integralgleichung zweiter Art

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi \tag{10}$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathrm{K}(x, \xi)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu den nämlichen Randbedingungen gehörende Green'sche Funktion des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) = L(u) + \lambda u$$

bildet.

Da nach Satz 1 die den Randbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung

$$\Lambda(u) + \varphi(x) = 0 \tag{11}$$

unmittelbar aus der Green'schen Funktion des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ gefunden wird, so erweisen sich also im wesentlichen die Integration dieser Differentialgleichung (11) bei gegebenen Randbedingungen und die Lösung jener Integralgleichung zweiter Art (10) als äquivalente Probleme.

Da die lösende Funktion $\mathrm{K}(x, \xi)$ sich in der Form eines Bruches darstellt, dessen Nenner $\delta(\lambda)$, wie Hilbert bewiesen hat, nur für eine direkte Reihe von reellen Werten, Eigenwerte genannt, verschwindet, so folgt unter der Voraussetzung, daß der Differentialausdruck $L(u)$ eine Green'sche Funktion für die betreffenden Randbedingungen besitzt, daß es auch stets eine solche für den Differentialausdruck $\Lambda(u)$ gibt, wenn λ kein Eigenwert $\lambda^{(m)}$ der Integralgleichung (10) ist. In dem Falle, daß λ ein Eigenwert ist, existiert, wie bewiesen ist, eine von Null verschiedene zum Eigenwert $\lambda^{(m)}$ gehörige Funktion $\psi^{(m)}(x)$, Eigenfunktion genannt, welche die homogene Integralgleichung

$$\psi^{(m)}(x) = \lambda^{(m)} \int_a^b K(x, \xi)\, \psi^{(m)}(\xi)\, d\xi$$

befriedigt. Wegen $K(x, \xi) = G(x, \xi)$ folgt aus Satz (1), daß $\psi^{(m)}(x)$ ein überall innerhalb des Intervalles viermal stetig differenzierbares Integral der homogenen Differentialgleichung

$$L(u) + \lambda^{(m)} u = 0$$

ist, welches die betreffenden Randbedingungen erfüllt. Umgekehrt, wenn die homogene Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für den Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ ein Integral besitzt, das die betreffenden Randbedingungen erfüllt, so ist $\lambda^{(m)}$ ein Eigenwert, und das Integral ist eine zugehörige Eigenfunktion für den Kern $K(x, \xi)$; der Differentialaus-

druck $\Lambda(u)$ aber besitzt für diesen Wert $\lambda = \lambda^{(m)}$ keine Green'sche Funktion im ursprünglichen engeren Sinne.

Wir bezeichnen den Wert $\lambda^{(m)}$ auch kurz als einen Eigenwert der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ und jene Lösungen $\psi^{(m)}(x)$ auch als Eigenfunktionen dieser Differentialgleichung für die betreffenden Randbedingungen.

Da der Kern $K(s, t)$, wie wir gezeigt haben (pag. 37), ein abgeschlossener ist, so gibt es jedenfalls unendlich viele Eigenwerte der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$. (Vgl. Hilbert's erste Mitteilung, S. 73—74). Ebenso, wenn wir uns auf zwei von Hilbert bewiesene Sätze beziehen (erste Mitteilung, Satz 5 und 6), entnehmen wir folgendes:

Satz 3: Wenn $h(x)$ eine stetige Funktion von x bezeichnet, sodaß für alle Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ die Gleichung

$$\int_a^b h(x)\,\psi^{(m)}(x)\,dx = 0$$

erfüllt ist, so ist $h(x)$ identisch Null.

Satz 4: Wenn die in Fourier'scher Weise gebildete Reihe

$$c_1\psi^{(1)}(x) + c_2\psi^{(2)}(x) + \cdots + c_m = \int_a^b f(x)\,\psi^{(m)}\,dx \tag{12}$$

gleichmäßig konvergiert, so stellt sie die Funktion $f(x)$ dar.

Da wegen Satz 1 jede viermal stetig differenzierbare und den Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{13}$$

gestattet, sobald man

$$\varphi(x) = -L(f(x))$$

wählt, so folgt aus einem von Hilbert[1]) zuerst bewiesenen und von E. Schmidt[2]) vereinfachten Satz, welcher aussagt, daß jede durch die Gleichung (13) darstellbare Funktion $f(x)$ die Entwickelung (12) gestattet, das Resultat:

Satz 5: Jede viermal stetig differenzierbare und den betreffenden Randbedingungen genügende Funktion $f(x)$ ist auf die Fourier'sche Weise in eine Reihe entwickelbar, die nach den Eigenfunktionen $\psi^{(m)}(x)$ der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ fortschreitet; diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig.

---

1) Hilbert, zweite Mitteilung, Satz 7.

2) Erhard Schmidt, Dissertation, Göttingen 1905.

Tritt der behandelte besondere Fall ein, daß zum Differentialausdruck L bei den betreffenden Randbedingungen eine Green'sche Funktion im engeren Sinne nicht existiert, so gelten unsere Entwickelungen für die Green'sche Funktion in dem erklärten erweiterten Sinne. Nehmen wir den Fall an, daß nur eine den Randbedingungen genügende überall viermal stetig differenzierbare Lösung der Gleichung $L(u) = 0$ existiert, so ergibt sich durch Anwendung der Green'schen Formel (1) an Stelle des Satzes 1 leicht die folgende Tatsache:

Satz 6: Wenn f eine viermal stetig differenzierbare, den Randbedingungen und der Bedingung

$$\int_a^b f(x)\, \psi^{(0)}(x)\, dx = 0 \tag{14}$$

genügende Funktion bedeutet, so ist die Integralgleichung erster Art

$$f(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi$$

lösbar, und ihre Lösung gewinnt man durch die Formel

$$\varphi(x) = -L(f(x)).$$

Diesem Satze 6 entsprechend müssen wir auch in den Voraussetzungen des Satzes 5 über die Entwickelbarkeit nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung $\Lambda(u) = 0$ für die zu entwickelnde Funktion $f(x)$ die Bedingung (14) hinzufügen; lassen wir jedoch im vorliegenden Falle $\lambda = 0$ als Eigenwert und die Funktion $\psi^0(x)$ als zugehörige Eigenfunktion gelten, so bleibt unser früherer Satz 5 auch bei unverändertem Wortlaut gültig.

In dem Falle, daß es zwei Lösungen $\psi_2^{(0)}(x)$ und $\psi_1^{(0)}(x)$ der Gleichung $L(u) = 0$ gibt, bleibt der Satz 6 gültig, nur daß an Stelle von (14) die zwei Gleichungen

$$\int_a^b f(x)\, \psi_1^{(0)}(x)\, dx = 0$$

und

$$\int_a^b f(x)\, \psi_2^{(0)}(x)\, dx = 0$$

vorkommen.

II. Die allgemeine Differentialgleichung des schwingenden Stabes.

Die im vorigen Abschnitt behandelte Theorie findet im Probleme der schwingenden Stäbe eine wichtige Anwendung. Die allgemeine Differentialgleichung des transversal schwingenden Stabes ist aus der mathematischen Physik bekannt. Sie lautet:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{B}(x)\frac{d^2U}{dx^2}\right] + \mathrm{A}(x)\frac{d^2U}{dt^2} = 0. \tag{15}$$

Dabei bedeutet $\mathrm{B}(x)$ den veränderlichen Biegungswiderstand des Stabes, welcher sehr dünn vorausgesetzt ist; $\mathrm{A}(x)\,dx$ die Masse eines Elementes von der Länge dx; U die Ordinate eines Punktes der Achse[1]) des Stabes, welche in der Gleichgewichtslage mit der x-Achse übereinstimmt, und t die Zeit.

Man versucht die Integration dieser Gleichung, indem man zuerst Lösungen von der Form

$$U(x,t) = u(x)(a\cos kt + b\sin kt)$$

sucht, wo a, b Konstanten, k ein Parameter und $u(x)$ eine neue Funktion von x allein ist. Durch das Eintragen dieses Wertes von $U(x,t)$ in (15) bekommt man für $u(x)$ die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{B}(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] = k^2\,\mathrm{A}(x)\,u, \tag{16}$$

welche für alle Werte von k zu untersuchen ist. Die verschiedenen physikalischen Umstände des Problems verlangen bestimmte Randbedingungen für die Lösung u der Gleichung (16). Betrachten wir z. B. den Fall, wo es sich um Schwingungen eines Stabes handelt, welcher an den beiden Enden $x = a$, $x = b$ festgeklemmt ist, dann ist es notwendig, daß für alle t

$$U(a,t) = U(b,t) = 0$$

$$\left[\frac{dU(x,t)}{dx}\right]_{x=a} = \left[\frac{dU(x,t)}{dx}\right]_{x=b} = 0$$

sind. Diesen Randbedingungen für U entsprechen für u an den Punkten $x = a$, $x = b$ die im vorigen Abschnitt genannten Randbedingungen I, d. h.

1) Die Linie, welche durch den Schwerpunkt eines jeden senkrecht zu dem Stab geführten Querschnittes geht.

$$u(a) = 0 \qquad\qquad u(b) = 0$$

$$\left[\frac{du}{dx}\right]_{x=a} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{du}{dx}\right]_{x=b} = 0.$$

Nehmen wir an, daß wir beweisen können, daß für eine unendliche Reihe von Werten von k

$$k_1,\ k_2,\ k_3,\ \ldots$$

von Null verschiedene Werte von u

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x),\ \ldots$$

existieren, welche die Randbedingungen erfüllen; dann ist die allgemeine Lösung des Problems

$$F(x, t) = \sum_{i=1,2,\ldots} a_i \varphi_i(x) \cos k_i t + \sum_{i=1,2,\ldots} b_i \varphi_i(x) \sin k_i t. \tag{17}$$

Am wichtigsten sind diejenigen Lösungen des Problems, für welche im Anfangsmoment $t = 0$

$$\left\{\begin{aligned} F(x, 0) &= f_1(x) \\ &\text{und} \\ \frac{d}{dt} F(x, 0) &= f_2(x) \end{aligned}\right. \tag{18}$$

ist, wo $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei gegebene, die Randbedingungen erfüllende Funktionen sind. Wenn man in (18) die aus (17) gebildeten Reihen für $F(x, 0)$ und $\frac{d}{dx} F(x, 0)$ einsetzt, bekommt man

$$f_1(x) = \sum_{i=1,2,\ldots} a_i \varphi_i(x)$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1,2,\ldots} k_i b_i \varphi_i(x).$$

Diese letzten Formeln zeigen, daß die durch (18) verlangten Bedingungen dann erfüllt sind, wenn die Möglichkeit der Entwickelung der willkürlichen Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ nach den Funktionen $\varphi_i(x)$ bewiesen ist.

Wir haben hier das Problem nur im Falle eines an den beiden Enden festgeklemmten Stabes angedeutet. Es kommen aber auch andere Fälle in Betracht. Ist B eine innerhalb und an den Grenzen $x = a$, $x = b$ positive, von Null verschiedene Funktion, so unterscheidet man in der Elastizitätstheorie je nach dem physikalischen Probleme folgende Arten von Randbedingungen für u:

$$\text{festgeklemmtes Ende} \begin{cases} u = 0 \\ \dfrac{du}{dx} = 0 \end{cases}$$

$$\text{gehaltenes Ende} \begin{cases} u = 0 \\ \dfrac{d^2 u}{dx^2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{freies Ende} \begin{cases} \dfrac{d^2 u}{dx^2} = 0 \\ \dfrac{d^3 u}{dx^3} = 0 \end{cases}$$

Wir haben also die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(B(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\right) = \lambda A(x) u \tag{19}$$

für die im vorigen Abschnitt angegebenen Randbedingungen I—III zu untersuchen. Zu diesem Zwecke werden wir die diesen verschiedenen Problemen entsprechenden Integralgleichungen bilden. Wir führen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\varphi(x) = \int_0^1 |x-z| \frac{1}{B(z)} dz; \quad \psi(x) = \int_0^1 |x-z| \frac{z}{B(z)} dz$$

$$\chi(x) = \int_0^1 |x-z| \frac{z^2}{B(z)} dz; \quad \omega(x) = \int_0^1 |x-z| \frac{z^3}{B(z)} dz$$

$$\alpha = \int_0^1 \frac{1}{B(z)} dz; \quad \beta = \int_0^1 \frac{z}{B(z)} dz; \quad \gamma = \int_0^1 \frac{z^2}{B(z)} dz.$$

Der erste Schritt, den wir zu machen haben, ist, eine Grundlösung der Gleichung

$$L(u) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left[B(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\right] = 0 \tag{20}$$

zu finden. Wir werden, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, das Intervall von $x = 0$ bis $x = 1$ wählen. Man überzeugt sich leicht, daß eine Grundlösung durch die Formel

$$\gamma(x, \xi) = -\frac{1}{4} B(\xi) \int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{B(z)} dz$$

gegeben ist. Eine allgemeinere Grundlösung bekommt man, indem man zu dieser letzten die vier mit unbestimmten Koeffizienten

multiplizierten Lösungen 1, x, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ von (20) hinzufügt. Sie ist

$$\gamma(x, \xi) + A + B(x) + C\varphi(x) + D\psi(x).$$

Die den verschiedenen Randbedingungen entsprechenden Green'schen Funktionen sind durch passende Wahl dieser vier Koeffizienten A, B, C, D zu konstruieren.

Wir werden sechs Green'sche Funktionen der Gleichung (20) angeben; sie entsprechen den sechs möglichen physikalischen Bedingungen für die Schwingung eines Stabes.

I. Beide Enden festgeklemmt. Die Randbedingungen sind:

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(1) = 0$$

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=1} = 0.$$

Die Green'sche Funktion des Differentialausdruckes (20) lautet:

$$G^{\mathrm{I}}(x, \xi) = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{\mathrm{B}(z)}\,dz + \frac{\gamma}{4(\alpha\gamma-\beta^2)}\,\varphi(\xi)\,\varphi(x)$$

$$+\frac{\alpha}{4(\alpha\gamma-\beta^2)}\,\psi(\xi)\,\psi(x) - \frac{\beta}{4(\alpha\gamma-\beta^2)}\left(\psi(\xi)\,\varphi(x)+\varphi(\xi)\,\psi(x)\right).$$

II. Beide Enden gehalten. Die Randbedingungen sind:

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(1) = 0$$

$$\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=0} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=1} = 0.$$

Die Green'sche Funktion lautet:

$$G^{\mathrm{II}}(x, \xi) = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{\mathrm{B}(z)}\,dz + \frac{\xi\varphi(x)+x\varphi(\xi)}{4}$$

$$+\frac{(1-2\xi)\,\psi(x)+(1-2x)\,\psi(\xi)}{4} - \frac{(\alpha-4\beta+4\gamma)}{4}\,x\xi$$

$$-\frac{\beta-2\gamma}{4}(x+\xi) - \frac{\gamma}{4}.$$

III. Ein Ende festgeklemmt, ein Ende gehalten. Die Randbedingungen sind:

$$f(0) = 0 \qquad\qquad f(1) = 0$$

$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} = 0 \qquad\qquad \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=1} = 0.$$

Die Green'sche Funktion ist:

$$G^{\mathrm{I\,II}}(x, \xi) = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{\mathrm{B}(z)}\,dz$$
$$-\frac{\beta-\gamma}{4(\alpha-2\beta+\gamma)}((1-\xi)\,\varphi(x)+(1-x)\,\varphi(\xi))$$
$$+\frac{\alpha-\beta}{4(\alpha-2\beta+\gamma)}((1-\xi)\,\psi(x)+(1-x)\,\psi(\xi))$$
$$+\frac{1}{4(\alpha-2\beta+\gamma)}(\varphi(x)-\psi(x))(\varphi(\xi)-\psi(\xi))$$
$$-\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{4(\alpha-2\beta+\gamma)}(1-x)(1-\xi).$$

IV. Ein Ende festgeklemmt, ein Ende frei. Die Randbedingungen sind:

$$f(0) = 0 \qquad \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]_{x=1} = 0$$
$$\left[\frac{df(x)}{dx}\right]_{x=0} = 0 \qquad \left[\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right]_{x=1} = 0.$$

Die Green'sche Funktion ist:

$$G^{\mathrm{I\,III}}(x, \xi) = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{\mathrm{B}(z)}\,dz - \frac{1}{4}(\xi\,\varphi(x)+x\,\varphi(\xi))$$
$$+\frac{1}{4}(\psi(x)+\psi(\xi))-\frac{\alpha}{4}x\xi+\frac{\beta}{4}(x+\xi)-\frac{\gamma}{4}.$$

V. Ein Ende gehalten, ein Ende frei. Die Randbedingungen sind:

$$f(0) = 0 \qquad \left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]_{x=1} = 0$$
$$\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right]_{x=0} = 0 \qquad \left[\frac{d^3 f(x)}{dx^3}\right]_{x=1} = 0.$$

In diesem Falle gibt es eine Lösung x der Gleichung (20), welche die Randbedingungen erfüllt. Wir müssen eine Green'sche Funktion im erweiterten Sinne konstruieren. Sie lautet:

$$G^{\mathrm{II\,III}}(x, \xi) = -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{\mathrm{B}(z)}\,dz + \frac{1}{4}(\xi\,\varphi(x)+x\varphi(\xi))$$
$$+\frac{1}{4}(\xi\,\omega(x)+x\,\omega(\xi))+\frac{1}{4}(1-3\xi)\,\psi(x)$$
$$+\frac{1}{4}(1-3x)\,\psi(\xi)+\mathrm{M}x\xi+\mathrm{N}(x+\xi)+\mathrm{P}.$$

Dabei ist

$$\mathrm{M} = -\int_0^1 \frac{z^6 - 6z^4 + 2z^3 + 9z^2 - 6z + 1}{4\,\mathrm{B}(z)}\,dz$$

$$\mathrm{N} = -\int_0^1 \frac{z^4 - 3z^2 + z}{4\,\mathrm{B}(z)}\,dz$$

$$\mathrm{P} = -\int_0^1 \frac{z^2}{4\,\mathrm{B}(z)}\,dz.$$

Diese Green'sche Funktion erfüllt die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{B}(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] = 3\xi x$$

und die Gleichung:

$$\int_0^1 x\,G^{\mathrm{II\,III}}(x,\xi)\,dx = 0.$$

VI. Beide Enden frei. Die Randbedingungen sind:

$$\left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=0} = 0 \qquad \left[\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right]_{x=1} = 0$$

$$\left[\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]_{x=0} = 0 \qquad \left[\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right]_{x=1} = 0.$$

Es gibt zwei Lösungen der Gleichung (20), 1 und x, welche die Randbedingungen erfüllen. Wir müssen dann eine Green'sche Funktion im erweiterten Sinne konstruieren. Sie lautet:

$$\begin{aligned}G^{\mathrm{III}}(x,\xi) = &-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{|x-z|\,|\xi-z|}{\mathrm{B}(z)}\,dz\\ &+\frac{1}{4}(\xi\varphi(x)+x\varphi(\xi)) - \frac{1}{4}(\psi(x)+\psi(\xi))\\ &+\frac{2-3\xi}{2}\chi(x) + \frac{2-3x}{2}\chi(\xi) - \frac{1-2\xi}{2}\omega(x) - \frac{1-2x}{2}\omega(\xi)\\ &+ Rx\xi + S(x+\xi) + T.\end{aligned}$$

Dabei ist

$$R = -\int_0^1\left(4z^6 - 12z^5 + 9z^4 + 2z^3 - 3z^2 + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\mathrm{B}(z)}\,dz$$

$$S = \int_0^1\left(2z^6 - 7z^5 + 7z^4 - z^3 - z^2 + \frac{z}{4}\right)\frac{1}{\mathrm{B}(z)}\,dz$$

$$T = -\int_0^1\left(z^6 - 4z^5 + 5z^4 - 2z^3 + \frac{1}{4}z^2\right)\frac{1}{\mathrm{B}(z)}\,dz.$$

Diese Green'sche Funktion befriedigt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{B}(x)\frac{d^2 u}{dx^2}\right] = 12\xi x - 6(x+\xi) + 4$$

und die Gleichungen

$$\int_0^1 G^{\mathrm{III}}(x,\xi)\,dx = 0$$

$$\int_0^1 x\,G^{\mathrm{III}}(x,\xi)\,dx = 0.$$

Mit Hülfe dieser sechs Green'schen Funktionen, die wir im allgemeinen mit $G(x,\xi)$ bezeichnen, können wir jetzt nach der angegebenen Methode die an Stelle der Gleichung (19) auftretenden Integralgleichungen bilden. Setzen wir in der Green'schen Formel (1) an Stelle von $u(x)$ eine Lösung $f(x)$ der Gleichung (19) und an Stelle von v die zu jenen Randbedingungen gehörige Green'sche Funktion des Differentialausdruckes (20), so finden wir für jede der sechs Arten von Randbedingungen

$$f(x) = -\lambda \int_0^1 G(x,\xi)\,\mathrm{A}(\xi) f(\xi)\,d\xi.$$

Mittelst der Substitution $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\mathrm{A}(x)}}$ geht diese Integralgleichung in eine andere mit symmetrischem Kerne

$$\varphi(x) = -\lambda \int_0^1 G(x,\xi)\sqrt{\mathrm{A}(x)}\sqrt{\mathrm{A}(\xi)}\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{21}$$

über. Die im vorigen Abschnitt bewiesenen allgemeinen Sätze sind auf diese letzte Integralgleichung anwendbar. Wir entnehmen daraus die Existenz einer unendlichen Reihe von Eigenfunktionen

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \ldots,$$

welche für eine entsprechende Reihe von Eigenwerten

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$$

die Gleichung (19) und die verlangten Randbedingungen erfüllen. In derselben Weise ergibt sich die Möglichkeit der Entwickelung jeder viermal stetig differenzierbaren Funktion nach den Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ und daraus die Lösung des am Anfang des Abschnittes genannten physikalischen Problems.

Es bleibt nur übrig zu zeigen, daß alle Eigenwerte λ in (19) positiv sind. Wir gehen von zwei Funktionen u und ω aus, die

durch die Beziehungen

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathrm{B}(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right] = -\sqrt{\mathrm{A}(x)}\,\omega(x)$$

und

$$u(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\sqrt{\mathrm{A}(\xi)}\,\omega(\xi)\,d\xi \tag{22}$$

miteinander verbunden sind. Dabei ist $G(x, \xi)$ eine der sechs berechneten Greenschen Funktionen. Mittelst der partiellen Integration bekommt man die Formel

$$\int_0^1 u\frac{d^2}{dx^2}\left(\mathrm{B}\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx = u\frac{d}{dx}\left(\mathrm{B}\frac{d^2u}{dx^2}\right) - \frac{du}{dx}\mathrm{B}\frac{d^2u}{dx^2} + \int_0^1 \mathrm{B}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx,$$

und wenn man die Randbedingungen und die Gleichung (22) berücksichtigt, bekommt man:

$$J(\omega) \equiv \int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)\sqrt{\mathrm{A}(x)}\sqrt{\mathrm{A}(\xi)}\,\omega(x)\,\omega(\xi)\,dx\,d\xi$$

$$= -\int_0^1 \mathrm{B}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx.$$

Wenn der Kern $G(x, \xi)\sqrt{\mathrm{A}(x)}\sqrt{\mathrm{A}(\xi)}$ so beschaffen ist, daß das Integral $J(\omega)$ wie hier nur negative Werte annimmt, was ω für eine stetige Funktion sei, so ist nach Hilbert (Erste Mitteilung, Abschnitt V) die Integralgleichung (21) nur für positive λ befriedigt.

III. Die Differentialgleichung des homogenen schwingenden Stabes.

Das im vorhergehenden Abschnitt entwickelte Problem vereinfacht sich beträchtlich durch die Annahme der Homogeneität des Stabes. Die im allgemeinen Falle als existierend bewiesenen Eigenfunktionen lassen sich hier durch bekannte transzendente Funktionen ausdrücken. Die allgemeine Theorie wird uns das Mittel geben, sie zu bilden. Wir haben wegen der Homogeneität des Stabes

$$\mathrm{A}(x) = \mathrm{B}(x) = 1.$$

Die Gleichung (19) reduziert sich auf

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \lambda u = 0. \tag{23}$$

Die Green'schen Funktionen des Differentialausdruckes

$$L(u) \equiv \frac{d^4 u}{dx^4}$$

sind, wenn wir dieselbe Numerierung wie im vorhergehenden Abschnitt behalten, die folgenden:

I.

$$G^{\mathrm{I}}(x, \xi) = -\frac{|x-\xi|^3}{12} + \frac{x^3 \xi^3}{3} - \frac{x^3 \xi^2 + x^2 \xi^3}{2} + x^2 \xi^2 + \frac{x^3 + \xi^3}{12} - \frac{x \xi^2 + x^2 \xi}{4}.$$

II.

$$G^{\mathrm{II}}(x, \xi) = -\frac{|x-\xi|^3}{12} - \frac{x^3 \xi + x \xi^3}{6} + \frac{x^2 \xi + x \xi^2}{4} + \frac{x^3 + \xi^3}{12} - \frac{x \xi}{3}.$$

III.

$$G^{\mathrm{I\,II}}(x, \xi) = -\frac{|x-\xi|^3}{12} + \frac{x^3 \xi^3}{12} - \frac{x^3 \xi^2 + x^2 \xi^3}{4} + \frac{3}{4} x^2 \xi^2 + \frac{x^3 + \xi^3}{12} - \frac{x^2 \xi + x \xi^2}{4}.$$

IV.

$$G^{\mathrm{I\,III}}(x, \xi) = -\frac{|x-\xi|^3}{12} + \frac{x^3 + \xi^3}{12} - \frac{x \xi^2 + x^2 \xi}{4}.$$

V.

$$G^{\mathrm{II\,III}}(x, \xi) = -\frac{|x-\xi|^3}{12} + \frac{x^5 \xi + x \xi^5}{40} - \frac{x^3 \xi + x \xi^3}{4} + \frac{x^2 \xi + x \xi^2}{4} + \frac{x^3 + \xi^3}{12} - \frac{33}{140} x \xi.$$

VI.

$$G^{\mathrm{III}}(x, \xi) = -\frac{|x-\xi|^3}{12} + \frac{x^5 \xi + x \xi^5}{10} - \frac{x^4 \xi + x \xi^4}{4} - \frac{x^5 + \xi^5}{20} + \frac{x^4 + \xi^4}{6} + \frac{x^2 \xi + x \xi^2}{4} - \frac{x^3 + \xi^3}{12} - \frac{13}{35} x \xi + \frac{11}{210}(x + \xi) - \frac{1}{105}.$$

Wir wollen die lösenden Funktionen für die Kerne G konstruieren. Wir bilden deshalb die Green'schen Funktionen des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) = \frac{d^4 u}{dx^4} - \lambda^4 u.$$

Dabei haben wir zur Erleichterung der Rechnung das frühere λ durch λ^4 ersetzt. Wenn man von den hyperbolischen Funktionen

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \quad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Gebrauch macht, lautet eine Grundlösung

$$\gamma(x, \xi) = \frac{1}{4\lambda^2}\left[\sin\lambda\,|x-\xi| - \sin h\lambda\,|x-\xi|\right]$$

Indem wir bemerken, daß vier partikuläre Lösungen der Gleichung $\Lambda(u) = 0$ folgende sind:

$$u_1(\lambda x) = \cos\lambda x + \cosh\lambda x$$
$$u_2(\lambda x) = \cos\lambda x - \cosh\lambda x$$
$$u_3(\lambda x) = \sin\lambda x + \sinh\lambda x$$
$$u_4(\lambda x) = \sin\lambda x - \sinh\lambda x,$$

und folgende Abkürzungen benutzen:

$$\alpha = \cos\lambda\cosh\lambda$$
$$\beta = \sin\lambda\sinh\lambda$$
$$\gamma = \cos\lambda\sinh\lambda$$
$$\delta = \sin\lambda\cosh\lambda,$$

bekommen wir nach der bekannten Methode sechs Green'sche Funktionen, welche entsprechende lösende Funktionen für die vorher angegebenen Kerne sind:

I. Lösende Funktion für den Kern $G^{\mathrm{I}}(x, \xi)$:

$$\Gamma^{\mathrm{I}}(x, \xi) = \frac{u_4(\lambda|x-\xi|)}{4\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_4(\lambda\xi)\,u_1(\lambda x) + u_1(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x))$$

$$+\frac{1}{8\lambda^2}(u_2(\lambda\xi)\,u_3(\lambda x) + u_3(\lambda\xi)\,u_2(\lambda x))$$

$$-\frac{\gamma-\delta}{4\lambda^2(1-\alpha)}u_2(\lambda x)\,u_2(\lambda\xi) + \frac{\gamma+\delta}{4\lambda^2(1-\alpha)}u_4(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)$$

$$-\frac{\beta}{4\lambda^2(1-\alpha)}(u_2(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi) + u_2(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x)).$$

II. Lösende Funktion für den Kern $G^{\mathrm{II}}(x,\xi)$:

$$\Gamma^{\mathrm{II}}(x,\xi) = \frac{u_4(\lambda|x-\xi|)}{4\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_4(\lambda\xi)\,u_1(\lambda x)+u_1(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x)+u_3(\lambda\xi)\,u_2(\lambda x)+u_2(\lambda\xi)\,u_3(\lambda x))$$

$$-\frac{\delta-\gamma}{8\lambda^2\beta}(u_3(\lambda x)\,u_3(\lambda\xi)+u_4(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi))$$

$$+\frac{\delta+\gamma}{8\lambda^2\beta}(u_3(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)+u_3(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x)).$$

III. Lösende Funktion für den Kern $G^{\mathrm{I\,II}}(x,\xi)$:

$$\Gamma^{\mathrm{I\,II}}(x,\xi) = \frac{u_4(\lambda|x-\xi|)}{4\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_4(\lambda\xi)\,u_1(\lambda x)+u_1(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x))$$

$$+\frac{1}{8\lambda^2}(u_2(\lambda\xi)\,u_3(\lambda x)+u_3(\lambda\xi)\,u_2(\lambda x))$$

$$+\frac{\beta}{2\lambda^2(\delta-\gamma)}u_2(\lambda\xi)\,u_2(\lambda x)+\frac{\alpha}{2\lambda^2(\delta-\gamma)}u_4(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x)$$

$$-\frac{\delta+\gamma}{4\lambda^2(\delta-\gamma)}(u_2(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)+u_2(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x)).$$

IV. Lösende Funktion für den Kern $G^{\mathrm{I\,III}}(x,\xi)$:

$$\Gamma^{\mathrm{I\,III}}(x,\xi) = \frac{u_4(\lambda|x-\xi|)}{4\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_4(\lambda\xi)\,u_1(\lambda x)+u_1(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x))$$

$$+\frac{1}{8\lambda^2}(u_2(\lambda x)\,u_3(\lambda\xi)+u_3(\lambda x)\,u_2(\lambda\xi))$$

$$-\frac{\delta-\gamma}{4\lambda^2(1+\alpha)}u_2(\lambda x)\,u_2(\lambda\xi)-\frac{\delta+\gamma}{4\lambda^2(1+\alpha)}u_4(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)$$

$$+\frac{\beta}{4\lambda^2(1+\alpha)}(u_2(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)+u_4(\lambda x)\,u_2(\lambda\xi)).$$

V. Lösende Funktion für den Kern $G^{\mathrm{II\,III}}(x,\xi)$:

$$\Gamma^{\mathrm{II\,III}}(x,\xi) = \frac{u_4(\lambda|x-\xi|)}{4\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_4(\lambda\xi)\,u_1(\lambda x)+u_1(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x))$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_3(\lambda\xi)\,u_2(\lambda x)+u_2(\lambda\xi)\,u_3(\lambda x))$$

$$+\frac{\alpha+1}{4\lambda^2(\delta-\gamma)}u_3(\lambda x)\,u_3(\lambda\xi)+\frac{\alpha-1}{4\lambda^2(\delta-\gamma)}u_4(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)$$

$$+\frac{\beta}{4\lambda^2(\delta-\gamma)}(u_3(\lambda x)\,u_4(\lambda\xi)+u_4(\lambda x)\,u_3(\lambda\xi)).$$

VI. Lösende Funktion für den Kern $G^{\mathrm{III}}(x,\xi)$:

$$\Gamma^{\mathrm{III}}(x,\xi) = \frac{u_4(\lambda|x-\xi|)}{4\lambda^2}$$

$$-\frac{1}{8\lambda^2}(u_3(\lambda\xi)\,u_2(\lambda x)+u_2(\lambda\xi)\,u_3(\lambda x))$$

$$+\frac{1}{8\lambda^2}(u_1(\lambda\xi)\,u_4(\lambda x)+u_4(\lambda\xi)\,u_1(\lambda x))$$

$$+\frac{\delta-\gamma}{4\lambda^2(1-\alpha)}u_1(\lambda x)\,u_1(\lambda\xi)+\frac{\delta+\gamma}{4\lambda^2(1-\alpha)}u_3(\lambda x)\,u_3(\lambda\xi)$$

$$-\frac{\beta}{4\lambda^2(1-\alpha)}(u_1(\lambda x)\,u_3(\lambda\xi)+u_3(\lambda x)\,u_1(\lambda\xi)).$$

Es ist bekannt, daß die lösenden Funktionen Γ die Gestalt eines Bruches

$$\Gamma(x,\xi) = -\frac{\Delta(\lambda;\,x,\xi)}{\delta(\lambda)}$$

haben und daß $\Delta(\lambda; x,\xi)$ für jeden Eigenwert $\lambda^{(h)}$, welcher Wurzel von $\delta(\lambda) = 0$ ist, in das Produkt zweier Eigenfunktionen $\varphi^{(h)}(x)\,.\,\varphi^{(h)}(\xi)$ zerfällt.

Wir sehen leicht, daß in unseren Fällen die von Null verschiedenen Eigenwerte $\lambda^{(h)}$ Wurzeln der folgenden Gleichungen sind:

(a)	$1-\alpha = 1-\cos\lambda\cosh\lambda = 0$	bei $G^{\mathrm{I}}(x,\xi)$.
(b)	$\beta = \sin\lambda\sinh\lambda = 0$	„ $G^{\mathrm{II}}(x,\xi)$.
(c)	$\delta-\gamma = \sin\lambda\cosh\lambda-\cos\lambda\sinh\lambda = 0$	„ $G^{\mathrm{I\,II}}(x,\xi)$.
(d)	$1+\alpha = 1+\cos\lambda\cosh\lambda = 0$	$G^{\mathrm{I\,III}}(x,\xi)$.
(e)	$\delta-\gamma = \sin\lambda\cosh\lambda-\cos\lambda\sinh\lambda = 0$	„ $G^{\mathrm{II\,III}}(x,\xi)$.
(f)	$1-\alpha = 1-\cos\lambda\cos\lambda = 0$	$G^{\mathrm{III}}(x,\xi)$.

Wenn wir jetzt die in den verschiedenen $\Delta\,(\lambda; x,\xi)$ auftretenden Koeffizienten entsprechend mit Hülfe der Gleichungen (*a*) bis (*f*) reduzieren, erzielen wir die Zerlegung in Produkte zweier Eigenfunktionen.

Diese Eigenfunktionen sind:

I. Für den Kern $G^{\mathrm{I}}(x, \xi)$:

$$u_4(\lambda)\, u_2(\lambda x) - u_2(\lambda)\, u_4(\lambda x)$$

oder wegen (a):

$$u_2(\lambda)\, u_2(\lambda x) + u_3(\lambda)\, u_4(\lambda x).$$

II. Für den Kern $G^{\mathrm{II}}(x, \xi)$:

$$u_3(\lambda x) + u_4(\lambda x) = \sin \lambda x.$$

III. Für den Kern $G^{\mathrm{I\,II}}(x, \xi)$:

$$u_3(\lambda)\, u_2(\lambda x) - u_1(\lambda)\, u_4(\lambda x)$$

oder wegen (c):

$$u_4(\lambda)\, u_2(\lambda x) - u_2(\lambda)\, u_4(\lambda x).$$

IV. Für den Kern $G^{\mathrm{I\,III}}(x, \xi)$:

$$u_3(\lambda)\, u_2(\lambda x) - u_1(\lambda)\, u_4(\lambda x)$$

oder wegen (d):

$$u_1(\lambda)\, u_2(\lambda x) + u_4(\lambda)\, u_4(\lambda x).$$

V. Für den Kern $G^{\mathrm{II\,III}}(x, \xi)$:

$$u_3(\lambda)\, u_3(\lambda x) + u_4(\lambda)\, u_4(\lambda x)$$

oder wegen (e):

$$u_1(\lambda)\, u_3(\lambda x) + u_2(\lambda)\, u_4(\lambda x).$$

VI. Für den Kern $G^{\mathrm{III}}(x, \xi)$:

$$u_3(\lambda)\, u_1(\lambda x) - u_2(\lambda)\, u_3(\lambda x)$$

oder wegen (f):

$$u_4(\lambda)\, u_1(\lambda x) + u_3(\lambda)\, u_3(\lambda x).$$

IV. Die Schwingungen eines spitzen Stabes.

In allen bis jetzt untersuchten Fällen war in der Schwingungsgleichung (15) $\mathrm{B}(x)$ als eine innerhalb und an den Grenzen des Intervalles $x = 0$ bis $x = 1$ positive, von Null verschiedene Funktion vorausgesetzt. Die Fälle, wo die Funktionen $\mathrm{A}(x)$ und $\mathrm{B}(x)$ an einem Ende Null werden, bieten sowohl vom mathematischen als vom physikalischen Standpunkt Interesse. Sie kommen in der Gleichung eines spitzen Stabes vor, dessen spitzes Ende frei

schwingt. Kirchhoff hat einige besondere Fälle [1]) untersucht, auf welche wir unsere allgemeine Methode anwenden wollen.

I. Der Stab bildet ein Prisma; er ist festgeklemmt in $x=1$ und frei in $x = 0$. $A(x)$ und $B(x)$ haben die speziellen Werte

$$A(x) = x \qquad B(x) = x^3.$$

Das mathematische Problem reduziert sich, wie es von Kirchhoff gezeigt ist, auf die Integration der Gleichung:

$$\Lambda(u) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 \frac{d^2 u}{dx^2}\right) - \lambda^2 x u = 0$$

mit den Randbedingungen:

$$f(1) = 0 \qquad \left[\frac{df(x)}{dx}\right] \quad = 0$$

und: $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x = 0$ endlich bleiben.

Der allgemeinen Methode nach bilden wir die zu diesen Randbedingungen gehörige Green'sche Funktion des Differentialausdruckes:

$$L(u) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 \frac{d^2 u}{dx^2}\right).$$

Sie ist:

$$G^{\text{IV I}}(x, \xi) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\xi} + x\xi\right) - (x+\xi) + \log\xi + 1 \qquad (x \leqq \xi)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{x} + x\xi\right) - (x+\xi) + \log x + 1 \qquad (x \geqq \xi).$$

Mit Hülfe dieser Green'schen Funktion können wir die dem Problem entsprechende Integralgleichung sofort bilden und daraus die Existenz- und Entwickelungssätze ableiten.

Um die Eigenfunktionen der Gleichung $\Lambda(u) = 0$ in ihrer analytischen Gestalt kennen zu lernen, haben wir auch die zu denselben Randbedingungen wie $G^{\text{IV I}}(x, \xi)$ gehörige Green'sche Funktion des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ zu konstruieren. Die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 \frac{d^2 u}{dx^2}\right) = \lambda^2 x u$$

---

1) Monatsbericht der Akad. d. Wiss. zu Berlin. 2. Okt. 1879.

läßt sich schreiben:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x^2\frac{du}{dx} = \lambda^2 u.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{du}{dx}\right) = \lambda u,$$

und auch, wenn

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x^2\frac{du}{dx}\right) = -\lambda u$$

ist.

Nun seien φ und ψ zwei Integrale der Gleichungen:

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\varphi}{dx} = \lambda\varphi$$

$$x\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d\psi}{dx} = -\lambda\psi$$

und zwar

$$\varphi(\lambda x) = 1+\frac{\lambda x}{1^2}+\frac{\lambda^2 x^2}{(1.2)^2}+\frac{\lambda^3 x^3}{(1.2.3)^2}+\cdots$$

$$\psi(\lambda x) = 1-\frac{\lambda x}{1^2}+\frac{\lambda^2 x^2}{(1.2)^2}-\frac{\lambda^3 x^3}{(1.2.3)^2}+\cdots;$$

die anderen zwei Integrale derselben Gleichungen sind:

$$\varphi'(\lambda x) = \varphi(\lambda x)\log(\lambda x)-2\left(\frac{\lambda x}{1^2}+\frac{\lambda^2 x^2(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2}+\frac{\lambda^3 x^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2.3)^2}+\cdots\right)$$

$$\psi'(\lambda x) = \psi(\lambda x)\log(\lambda x)+2\left(\frac{\lambda x}{1^2}-\frac{\lambda^2 x^2(1+\frac{1}{2})}{(1.2)^2}+\frac{\lambda^3 x^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})}{(1.2.3)^2}-\cdots\right).$$

Es ist ersichtlich, daß vier partikuläre Integrale der gegebenen Gleichung $\Lambda(u) = 0$ folgende sind:

$$\frac{\partial\varphi(\lambda x)}{\partial x};\quad \frac{\partial\psi(\lambda x)}{\partial x};\quad \frac{\partial\varphi'(\lambda x)}{\partial x};\quad \frac{\partial\psi'(\lambda x)}{\partial x}.$$

Die Green'sche Funktion des Differentialausdruckes Λu ist:

$$\Gamma^{\mathrm{IV.I}}(x,\xi) = f(x,\xi) \qquad (x \leqq \xi)$$

$$= f(\xi,x) \qquad (x \geqq \xi),$$

wo

$$f(x,\xi) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{d\varphi'(\lambda\xi)}{d\xi}\frac{d\varphi(\lambda x)}{dx} + \frac{d\psi'(\lambda\xi)}{d\xi}\frac{d\psi(\lambda x)}{dx}\right)$$
$$- \frac{1}{2\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\psi(\lambda)}\left\{\left(\frac{d\psi(\lambda\xi)}{d\xi}\frac{d\varphi(\lambda x)}{dx} + \frac{d\varphi(\lambda\xi)}{d\xi}\frac{d\psi(\lambda x)}{dx}\right)\right.$$
$$+ \lambda\frac{d\varphi(\lambda\xi)}{d\xi}\frac{d\varphi(\lambda x)}{dx}\left(\varphi'(\lambda)\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda} + \psi(\lambda)\frac{d\varphi'(\lambda)}{d\lambda}\right)$$
$$\left. + \lambda\frac{d\psi(\lambda\xi)}{d\xi}\frac{d\psi(\lambda x)}{dx}\left(\psi(\lambda)\frac{d\psi'(\lambda)}{d\lambda} + \psi'(\lambda)\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\right)\right\}$$

ist.

Setzen wir in der Green'schen Formel (1)

$$u(x) = G^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi) \qquad v(x) = \Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi^*),$$

so erhalten wir

$$\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(\xi,\xi^*) - G^{\mathrm{IV\,I}}(\xi^*,\xi) = -\lambda^2\int_0^1 G^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi)\,\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi^*)\,x\,dx$$

oder nach der Multiplikation mit $\sqrt{\xi}\,.\,\sqrt{\xi^*}$

$$\sqrt{\xi\,\xi^*}\,\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(\xi,\xi^*) - \sqrt{\xi\,\xi^*}\,G^{\mathrm{IV\,I}}(\xi^*,\xi) =$$
$$-\lambda^2\int_0^1 \sqrt{x\,\xi}\,G^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi)\,\sqrt{x\,\xi^*}\,\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi^*)\,dx.$$

Diese Formel zeigt, daß $\sqrt{x\xi}\,\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi)$ lösende Funktion für den Kern $\sqrt{x\xi}\;G^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi)$ ist. Wir erkennen leicht, wenn wir die lösende Funktion $\sqrt{x\xi}\;\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi)$ in die Gestalt eines Bruches setzen:

$$\sqrt{x\xi}\,\Gamma^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi) = -\frac{\Delta(\lambda;\,x,\xi)}{\delta(\lambda)},$$

daß die Eigenwerte Wurzeln der transzendenten Gleichung:

$$\frac{d}{d\lambda}\varphi(\lambda)\psi(\lambda) = 0 \tag{24}$$

sind. Wenn wir mit Hülfe dieser letzten Gleichung die in $\Delta(\lambda;\,x,\xi)$ auftretenden Koeffizienten vereinfachen, so erzielen wir die Zerlegung von $\Delta(\lambda;\,x,\xi)$ in das Produkt zweier Eigenfunktionen. Diese Eigenfunktionen sind:

$$\sqrt{x}\left(\psi(\lambda)\frac{\partial\varphi(\lambda x)}{\partial x} + \varphi(\lambda)\frac{\partial\psi(\lambda x)}{\partial x}\right)$$

oder wegen (24):

$$\sqrt{x}\left(\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\frac{d\varphi(\lambda)}{dx}-\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\frac{d\psi(\lambda x)}{dx}\right).$$

Nach diesen Eigenfunktionen können wir eine willkürliche Funktion entwickeln, und die Entwickelung gilt auch, wenn wir nachträglich die zu entwickelnde Funktion durch $\sqrt{x}$ dividieren und den Faktor $\sqrt{x}$ in allen Eigenfunktionen fortlassen.

Wir gehen jetzt zu einem andern Falle über.

II. Der Stab bildet einen sehr spitzen Kegel; er ist festgeklemmt in $x=1$ und frei in $x=0$. $A(x)$ und $B(x)$ haben die speziellen Werte:

$$A(x) = x^2 \qquad B(x) = x^4.$$

Das mathematische Problem reduziert sich auf die Integration der Gleichung:

$$\Lambda(u) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\left(x^4\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\lambda^2x^2u = 0$$

mit den Randbedingungen:

$$f(1) = 0 \qquad \left[\frac{df(1)}{dx}\right]_{x=1} = 0,$$

und: $f(x)$ soll bei der Annäherung an den Randpunkt $x=0$ endlich bleiben.

Die Green'sche Funktion des Differentialausdruckes

$$L(u) = \frac{d^2}{dx^2}\left(x^4\frac{d^2u}{dx^2}\right)$$

ist:

$$G^{\mathrm{IV\,I}}(x,\xi) = \frac{x}{6\xi^2}-\frac{1}{2\xi}-\frac{x+\xi}{2}+\frac{x\xi}{3}+1 \qquad (x \leqq \xi)$$

$$= \frac{\xi}{6x^2}-\frac{1}{2x}-\frac{x+\xi}{2}+\frac{x\xi}{3}+1 \qquad (x \geqq \xi).$$

Wir wollen jetzt die Green'sche Funktion des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ bilden. Die Gleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \lambda^2x^2u$$

läßt sich schreiben:

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^3\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}x^3\frac{du}{dx} = \lambda^2u.$$

Sie wird erfüllt, wenn

$$\frac{1}{x^2}\frac{d}{dx}\left(x^3\frac{du}{dx}\right) = \pm\lambda u$$

ist. Die gegebene Gleichung $\Lambda(u) = 0$ hat infolgedessen die partikulären Lösungen:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2}, \quad \frac{d^2\varphi'}{dx^2}, \quad \frac{d^2\psi'}{dx^2}.$$

Die Green'sche Funktion von $\Lambda(u)$ ist:

$$\begin{aligned}\Gamma^{IV\,I}(x,\xi) &= f(x,\xi) \qquad (x \leqq \xi)\\ &= f(\xi, x) \qquad (x \geqq \xi),\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}f(x,\xi) = &-\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\varphi'(\lambda\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\varphi(\lambda x)}{dx^2} - \frac{d^2\psi'(\lambda\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\psi(\lambda x)}{dx^2}\right]\\ &+ \frac{1}{\lambda^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\right)}\left[\lambda^2\left(\frac{d^2\varphi'(\lambda)}{d\lambda^2}\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\right.\right.\\ &\left.+\frac{d^2\psi(\lambda)}{d\lambda^2}\frac{d\varphi'(\lambda)}{d\lambda}\right)\frac{d^2\varphi(\lambda\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\varphi(\lambda x)}{dx^2}\\ &-\lambda^2\left(\frac{d^2\varphi(\lambda)}{d\lambda^2}\frac{d\psi'(\lambda)}{d\lambda} + \frac{d^2\psi'(\lambda)}{d\lambda^2}\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\right)\frac{d^2\psi(\lambda\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\psi(\lambda x)}{dx^2}\\ &\left.+\frac{d^2\psi(\lambda\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\varphi(\lambda\xi)}{dx^2} + \frac{d^2\varphi(\lambda\xi)}{d\xi^2}\frac{d^2\psi(\lambda x)}{dx^2}\right]\end{aligned}$$

ist.

In derselben Weise wie im vorhergehenden Falle erkennen wir, daß die dem Kerne $\sqrt{x\xi}\,G^{IV\,I}(x,\xi)$ gehörenden Eigenwerte Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\cdot\frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\right) \tag{25}$$

sind und die Eigenfunktionen die folgenden sind:

$$\sqrt{x}\left(\frac{d^2\psi(\lambda)}{d\lambda^2}\frac{d^2\varphi(\lambda x)}{dx^2} - \frac{d^2\varphi(\lambda)}{d\lambda^2}\frac{d^2\psi(\lambda x)}{dx^2}\right)$$

oder wegen (25):

$$\sqrt{x}\left(\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda}\frac{d^2\varphi(\lambda x)}{dx^2} + \frac{d\psi(\lambda)}{d\lambda}\frac{d^2\psi(\lambda x)}{dx^2}\right).$$

V. Differentialgleichungen gerader Ordnung.

Die im Abschnitt I entwickelte Theorie läßt sich ohne Schwierigkeiten auf die Differentialgleichungen gerader Ordnung übertragen. Die gewöhnliche, sich selbst adjungierte Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung läßt sich in die Gestalt

$$(26) \quad \frac{d^n}{dx^n} p_n(x) \frac{d^n u}{dx^n} + \frac{d^{n-1}}{dx^{-1}} p^{n-1}(x) \frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{d}{dx} p_1(x) \frac{du}{dx} + p_0(x)\, u$$

bringen; dabei sind $p_n, p_{n-1}, \ldots, p_1$ n-mal resp. $n-1, \ldots$ 1-mal stetig differenzierbare Funktionen von x und p_0 eine stetige Funktion. Durch partielle Integration bildet man leicht die Green'sche Formel. Die Grundlösung genügt in x der Gleichung (26) und ist im gegebenen Intervalle $x = a$ bis $x = b$ für alle x, ausgenommen $x = \xi$, $2n$-mal stetig differenzierbar. Im Punkte $x = \xi$ sind die ersten $2n-2$ Ableitungen stetig, die $2n-1^{\text{te}}$ Ableitung aber erleidet in diesem Punkte den Abfall -1

$$\underset{\varepsilon=0}{L} \left[\frac{d^{2n-1}\gamma(x,\xi)}{dx^{2n-1}}\right]_{x=\xi+\varepsilon} - \underset{\varepsilon=0}{L} \left[\frac{d^{2n-1}\gamma(x,\xi)}{dx^{2n-1}}\right]_{x=\xi-\varepsilon} = -1.$$

Die Green'sche Funktion ist auch hier eine Grundlösung, welche gegebene homogene Randbedingungen erfüllt. Die zur Anwendung unserer Theorie geeigneten Randbedingungen sind leicht aus der Green'schen Formel bei verschiedenen Voraussetzungen über die Koeffizienten p_0, p_1, p_n zu ersehen. Es kommen z. B. an den beiden Randpunkten $x = a$ und $x = b$ die Randbedingungen:

$$f(x) = 0 \qquad \frac{d^h f(x)}{dx^h} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, 2n)$$

oder:

$$f(x) = 0 \qquad \frac{d^h f(x)}{dx^h} = 0 \qquad (h = 2, 4, 6, \ldots, 2n)$$

u. s. w. vor.

Die Übetragung der Sätze 1—6 erfolgt auch ohne Schwierigkeiten.

Inhalt.

Lebenslauf.

Ich, Alexander Myller, orthodoxer Religion, wurde am 3. Dezember 1879 in Bukarest als Sohn des Finanz-Ministerialdirektors Theodor Myller geboren. Nach Absolvierung des Gymnasiums im Jahre 1896 studierte ich an der Universität zu Bukarest und verließ sie im Jahre 1900 mit dem Grade Licentiat der Mathematik. Nach einer zweijährigen Praxis als Oberlehrer-Supleent bestand ich 1902 die staatliche Lehramtsprüfung. Vom Winter 1902 an setzte ich in Berlin und 2 Semester nachher in Göttingen meine Studien fort. In Göttingen hörte ich bei den Herren Professoren Blumenthal, Hilbert, Klein, Minkowski und Schwarzschild. Ich spreche ihnen meinen Dank aus.